

Didaktické prostředí Autobus

Milan Hejný, Darina Jirotková
Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta

Abstrakt

Nástrojem edukační strategie orientované na budování matematických schémat (Hejný 2007, 2008) jsou didaktická prostředí. Jedním z nich je Autobus. Je založeno na životní zkušenosti žáka s jízdou hromadnými dopravními prostředky. Proces vystupování a nastupování cestujících a jeho evidence tabulkou dává bohatý soubor dat a číselných vazeb. Prostor Autobus je aplikovatelné již od 1. ročníku 1. st. ZŠ (Hejný, Jirotková, Slezáková, 2007a, b, 2008a, b,) a je didakticky účinné i na 2. stupni ZŠ. Je zaváděno postupně v pěti etapách, v šesté etapě jsou uvedeny tři ilustrace ukazující na možná propojení tohoto prostředí do dalších oblastí matematiky.

Klíčová slova: budování matematických schémat, evidence procesu, matematizace reálné situace, tvorba tabulky, vazby mezi daty v tabulce, proces, koncept

Článek byl podpořen výzkumným záměrem Učitelská profese v měnících se požadavcích na vzdělávání č. MSM 0021620862.

1. První etapa: Žáci se seznamují s hrou

1.1 Popis zaměstnání/hry

Hra simuluje cestování autobusem na pravidelné lince spojující několik zastávek. Autobus je lepenková krabice a cestující jsou plastové lahve. Zastávky jsou jistá místa ve třídě, například stůl učitele, umyvadlo, mapa, tabule, skříň, klavír, ... Autobus jede z výchozí zastávky na konečnou a na každé zastávce může někdo vystoupit a někdo nastoupit. Vystupování a nastupování na každé zastávce řídí výpravčí. Žáci vidí, jak cestující nastupují i vystupují, ale do autobusu (krabice) nevidí. Úkolem žáků je zapamatovat si celý proces jízdy, případně jej nějak zaznamenat. Po představení klade učitel otázky týkající se právě předvedeného cestování a žáci odpovídají.

1.2 Aktéři

Na hře se podílí tři typy aktérů:

režisér (u prvních představení tuto roli zastává učitel), který určí počet a rozmístění zastávek, určí pro každou zastávku výpravčího a přidělí mu jistý počet cestujících, určí řidiče autobusu a po představení, když autobus dojede na konečnou, klade žákům otázky,

výpravčí na své zastávce realizuje vystupování a nastupování cestujících; podle vlastního uvážení někteří z cestujících v autobuse nejdříve vystoupí a z těch, co má k dispozici, někteří nastoupí,

řidič autobusu jezdí s autobusem od zastávky k zastávce.

1.3 Úvodní hodiny

Začátek druhého pololetí v 1. ročníku. Učitel si povídá s třídou o cestování autobusem, případně vypráví ještě jiný motivační příběh, během něhož představí realie:

Autobus = krabice; může být funkčně pomalována

Cestující = plastové láhve; budou do autobusu nastupovat i z něj vstupovat

Zastávky se jmény, například: Modrý rybník (stůl učitele) – nástupní zastávka, Červený vrch (umyvadlo), Žlutý dům (dveře), Zelená louka (stůl učitele) – konečná zastávka.

Ke každé zastávce dá učitel 1 – 3 lahve, jako možné cestující. Cestující čekají na autobus, nebo přišli vyprovodit kamaráda, nebo naopak na někoho čekají. Začíná představení.

Učitel: *Prázdný autobus* (učitel ukáže třídku, že krabice je prázdná) *přijel na zastávku Modrý rybník. Zde nastoupí jeden cestující* (učitel zvedne jednu láhev nad hlavu a pomalu se zvukovým efektem ji vloží do krabice, obsah krabice žáci nevidí).

Učitel: *Řidič zavřel dveře.* (Učitel chytí krabici.) *Autobus se rozjel, odjíždí ze zastávky Modrý rybník a jede na zastávku Červený vrch.* (Učitel simuluje cestu autobusu, přejde k umyvadlu.)

Učitel: *Autobus zastavil na zastávce Červený vrch* (učitel položí krabici). *Zde nastoupil jeden cestující* (učitel zvedne jednu láhev nad hlavu a pomalu ji vloží do krabice). *Pak nastoupil další cestující* (učitel opakuje předchozí pohyby). *Nakonec nastoupil ještě jeden cestující* (učitel opakuje předchozí pohyby).

Učitel: *Řidič zavřel dveře.* (Učitel chytí krabici.) *Autobus se rozjel, odjíždí ze zastávky Červený vrch a jede na zastávku Žlutý dům.* (Učitel simuluje cestu autobusu, přejde ke dveřím a krabici zde položí. Z krabice vybere jednu láhev, zvedne ji nad hlavu.)

Učitel: *Jeden cestující vystoupil* (položí láhev vedle dveří). *Pak vystoupil další cestující* (učitel vybere z krabice další láhev, zvedne ji nad hlavu a položí vedle dveří).

Učitel: *Řidič zavřel dveře.* (Učitel chytí krabici). *Autobus odjíždí ze zastávky Žlutý dům a jede na zastávku Zelená louka.* (Učitel simuluje cestu autobusu, přejde ke stolku, zde krabici položí.)

Učitel: *Autobus dojel až na konečnou na Zelenou louku. Zde vystoupí všichni cestující, kteří v autobusu jsou. Co myslíte, kolik jich tam je? Každý žák napíše svůj odhad na stírací tabulku.*

Žáci typují a pak učitel postupně vybere tři lahve z krabice a ukáže třídě, že krabice je prázdná. Žáci, kteří uhodli, jásají. Další představení dopadne podstatně lépe, většina žáků ví, že je nutno počítat cestující v autobusu, a úlohu zvládnou dobře.

Roli řidiče i role výpravčích učitel postupně svěřuje žákům. Všude, kde jsme hru hráli, bylo třeba práci výpravčích zlepšovat. Nejčastější nedostatky výpravčích byly:

- Nejdříve nechali cestující nastupovat, pak vystupovat.
- Lahvemi manipuloval, ale nic k tomu neříkal.
- Text, který žák řekl, byl nestandardní (např. *tohohle vyberu a tohohle tam dám*).
- Lahve, s nimiž zacházel, nezvedal nad hlavu a když tak jenom velice krátce.
- Když k němu autobus dojel, začal uvažovat, kolik bude vystupovat a kolik nastupovat, a dlouho se nic nedělo.
- Při vystupování nebo nastupování najednou vystoupili/nastoupili dva cestující. Vystupující nebo nastupující lahve počítal: *Nastoupil jeden cestující, nastoupil druhý cestující.*

Řidič jen zcela ojediněle spletl pořadí zastávek. V podstatě žádné chyby nedělal, pokud to byla role němá. Když jsem ale dali řidiči úkol komentovat svoji cestu (*Autobus odjel ze zastávky Modrý rybník, ... Autobus přijel na zastávku Červený vrch*), objevilo se mnoho chyb nepřesného nebo chybného hlášení..

Představení se postupně kvantitativně rozšiřují: výpravčí dostávají více cestujících, případně se trasa autobusu prodlouží o jednu zastávku. Souběžně s tím učitel k základní otázce *Kolik cestujících došlo na konečnou?* začíná přidávat otázky další: *Kolik cestujících nastoupilo na zastávce Modrý rybník? Kolik cestujících bylo v autobuse, když autobus vyrazil ze zastávky Červený vrch?* apod.

Hra se opakuje v následujících týdnech mnohokrát, a proto je z hlediska šetření času nutno zavést systém, který rychle celou hru připraví. V jedné třídě celá příprava netrvala ani 1

minutu. Učitelka řekla *Hrajeme autobus* (třídou zahlaholilo HURÁ!) a již přidělovala role: *Slávek je řidič* (hoch běží pro krabici = autobus a čeká u Modrého jezera), *Bára je výpravčí u Modrého jezera, má 4 cestující* (dívka bere 4 lahve a jde na zastávku), *Kamila je výpravčí u Červeného vrchu, má 3 cestující*, *Pavlík je výpravčí u Žlutého domu, má 3 cestující*, *Majda je výpravčí u Hnědého koupaliště, má 3 cestující* a *Honza je výpravčí na konečné na Zelené louce*. Jména měla učitelka připravená na velkém harmonogramu, pro 10 představení. Oslovené děti s velikou radostí a hbitostí šly pro lahve a na svá stanoviště. I když to Majda trochu popletla, chtěla si vzít 4 cestující, celá organizace přípravy netrvala ani 1 minutu.

1.4 Didaktický komentář

V první etapě hra přispívá zejména k rozvoji pěti žákových potřeb a schopností:

1) **Potřeba kvantifikovat jevy všedního života.** Existují děti, které již v předškolním věku mají tuto schopnost výrazně rozvinutou. U školáků se tato schopnost rozvíjí zejména v případech, kdy se ve třídě počítají věci, které děti zajímají. Například *Kolik mám v penálu tužek? Kolik máme doma dveří? Kolik písmen má moje jméno? V kolikátém podlaží bydlíme? Kolik učeben má naše škola?* atd.

Kdysi jsem vystupoval na zastávce metra Hůrka a zde vystupovala i maminka s dcerou. Asi 7-letá dívka po vystoupení ze soupravy mamince řekla. *Maminko, víš kolik se s námi vezlo kočárků?* Maminka byla otázkou překvapena a dívka pokračovala: *Bylo jich pět. Ale piskořů v nich bylo šest. Ten modrý kočárek byl pro dvojčata.* Dítě, které takto vnímá svět kolem sebe, má vnitřní potřebu číselně evidovat zajímavé jevy, s nimiž přichází do styku. Prostředí autobus této potřebě napomáhá.

2) **Udržení pozornosti po celou dobu představení.** Jestliže se žák během představení nechá něčím rozptýlit, výrazně se snižuje jeho schopnost dát po hře správné odpovědi. Snaha uspět udržuje pozornost žáka po celou dobu představení.

3) **Schopnost matematizace reálné situace.** Při hře dochází k propojení životní zkušenosti žáka na jistý početní jev a to vede některé žáky k tomu, že při jízdě v dopravních prostředcích si všimají počtu nastupujících a vystupujících na zastávkách. Někdy žák počítá pouze děti, nebo pouze zvířata, nebo pouze kluky apod.

4) **Cvičení krátkodobé procesuální paměti.** Žák ví, že po každém představení bude učitel klást otázky, a snaží se co nejlépe celé představení uchovat v paměti. Žáci, kteří to nezvládají, snaží se nějak si představení zapisovat, evidovat písemně, co se na které zastávce odehrálo. To vede k potřebě

5) **vytvořit vhodný jazyk na uchopení procesu.** Tím již přecházíme do druhé etapy.

2. Druhá etapa: Žáci spolutvoří tabulkový záznam představení

2.1 Přejít od práce třídy k práci skupin a práci jedince

Nevýhodou třídního představení je, že přímo v akci je pouze několik žáků a většina žáků je pouze v roli pozorovatele. To lze zlepšit přechodem ke hře ve skupinách. Lze k tomu přistoupit tehdy, když žáci již dobře ovládají technologii hry. Nejprve třídu rozdělíme na dvě skupiny, později i na tři nebo čtyři. V každé skupině je určen režisér, řidič, pět je výpravčích a aspoň jeden zapisovatel, který představení zapisuje. Některé role je možné spojit, například řidiče a režiséra, nebo výpravčího na zastávce A a výpravčího na zastávce E. Skupina žáků sedí kolem stolu, nebo na koberci a v tomto prostoru si určí místa zastávek. Autobusem je malá krabička, cestujícími jsou zátky od plastových lahví. Některé žáky hra zaujme tak silně, že si ji doma hrají sami, nebo s kamarádem či babičkou. K tomu dochází zejména ve třetí etapě.

2.2 Pokusy žáků o nalezení vhodného jazyka na zaznamenání představení

Žáci, kteří začínají hledat vhodný způsob, jak představení zaznamenat, jdou obvykle dvěma směry: buď se snaží zapsat vše pomocí písmen, číslic, čárek, šipek, obrázků představujících autobus, nebo zapisují pouze aktuální stav cestujících v autobusu psaním čárek a jejich škrtnutím. První strategie končí v chaosu, protože žák nestihne zaznamenat vše, co si původně usmyslil. Druhá strategie vede poměrně dobře k nalezení odpovědi na otázku, kolik cestujících dojelo na konečnou, ale informace o průběhu cesty neuchovává.

Popíšeme jeden z obrázků ilustrující první strategii: Modrý flek znázorňuje zastávku Modrý rybník. U něj je obdélník s koly jako autobus a uvnitř dvě velké tečky jako dva cestující, kteří zde nastoupili. Vedle je Červený vrch, ale pod ním už je jen čmárání, protože žák nestihl podobně zapsat co se dělo na této zastávce.

Ilustrace druhé strategie: ++++//+//+//+//+// žákův zápis byl méně úhledný, ale bylo z něj jasné, že celkem do autobusu nastoupilo 12 cestujících a vystoupilo 7. Tedy 5 dojelo na konečnou. Ze zápisu nebylo možno zjistit, kolik cestujících na které zastávce vystoupilo a kolik nastoupilo. Jestliže to žák náhodou věděl, pak tato informace byla uložena v jeho paměti a záznam pouze napomáhal paměti. Nikdo jiný by ze zápisu tyto údaje vyčíst neuměl. Někteří žáci začali do zápisů vkládat i obrázky zastávek a takový zápis již lépe uchovával údaje vztahující se k jednotlivým zastávkám.

2.3 Práce učitele

Úlohou učitele je vést žáky k objevu tabulky jako účinného nástroje na popis představení. Učitel k tomu má čtyři nástroje. Prvním je volba otázek, které po hře klade. Druhým je opakování některé hry. Třetím je sledování zápisů, které žáci používají, a řízení třídní diskuse. Čtvrtým je neoficiální prozrazení tabulky.

Otázky, které učitel po hře klade, se nejprve týkají jednotlivých zastávek (např. *Kolik cestujících vystoupilo a kolik nastoupilo na zastávce B?*), pak se týkají počtu cestujících v autobusu v jednotlivých úsecích (např. *Kolik cestujících bylo v autobuse, když odjížděl ze zastávky C?*), dále se týkají souborů údajů (např. *Na které zastávce nejvíce lidí vystoupilo?* nebo *Na které zastávce přibyl do autobusu právě 1 cestující?*), konečně sofistikovaných údajů (ilustraci uvedeme níže).

Když ve třídě vznikne spor o to, „jak to vlastně bylo?“, navrhne učitel, že si představení zopakují. Zde se dobře projeví kvalita záznamů jednotlivých žáků. Někteří žáci na základě svého záznamu dokáží přesně reprodukovat aspoň část představení.

Právě tyto žáky učitel žádá, aby svůj záznam ukázali třídě. Je velká pravděpodobnost, že propojením různých úspěšných myšlenek se nakonec třída dopravuje k objevu tabulky.

Jestliže se tak nestane, pomůže učitel. Zůstane-li jeho rada spíše v ústraní, budou aspoň někteří žáci považovat nový objev za součást vlastního hledání. Vhodný okamžik se učiteli naskytne, když se nezdaří opakovat představení, protože některý výpravčí si nepamatuje, kolik cestujících

	A	B	C	D	E
V					
N					

nechal vystoupit a kolik nastoupit a ani mezi spolužáky zde není jednotný názor. Učitel řekne, že následující představení budeme opakovat, a dodá, že on sám si udělá záznam představení. Nakreslí si tabulku, ve které do záhlaví místo našich písmen A, B, C, D a E nakreslí obrázky Modrého rybníku, Červeného vrchu, Žlutého domu, Hnědého koupaliště a Zelené louky. Do tabulky během představení dopisuje čárky podle toho jak výpravčí určují počty vystupujících a nastupujících. Tímto způsobem učitel prozradí žákům efektivní způsob zápisu představení. Několik žáků již při příštím představení učitelův zápis využije a postupně se to od nich naučí všichni žáci. Učitel nic nevysvětluje, nová znalost se šíří sama, neboť žáci mají potřebu vhodný jazyk najít.

Hru hrajeme dosti často, například na každé druhé hodině jí věnujeme 10 – 12 minut. Důležitá je organizace práce, aby při přípravě a realizaci představení nebyly zbytečné prostoje. To hrozí zejména, když se hra hraje ve dvou nebo více skupinách. Někteří žáci s prostředím autobus sžijí do té míry, že žádají náročnější představení: více cestujících, více zastávek. Sami vymýšlí zastávky na znamení a v roli výpravčích volí extrémní řešení. Například na některé zastávce nechá všechny cestující vystoupit a pak je opět nechá všechny nastoupit. (Spolužákům vysvětlí, že až po vystoupení cestující zjistili, že vystoupili dříve, než chtěli). Nebo nenechá nikoho vystoupit ani nastoupit. Nebo naopak všechny cestující vystoupí a nechá jet autobus dále prázdný.

Všechny tyto jevy pomáhají žákům hlouběji proniknout do hry a zlepšit způsob zápisu představení.

2.4 Rozšíření tabulky

U dalších představení si stále větší počet žáků celý proces zaznamenává tabulkou. Žáci jsou již schopni odpovědět i na náročnější otázky typu *Na které zastávce vystoupil největší počet cestujících?* nebo *Kolik cestujících bylo v autobusu na cestě od Žlutého domu do Hnědého koupaliště?* nebo *Ve kterém úseku jízdy bylo v autobuse nejvíce cestujících?* Poslední otázky vyžadují delší počítání. Proto si někteří žáci začali tato čísla – počet cestujících v autobuse v tom kterém úseku jízdy – k tabulce připisovat. Tak vznikla rozšířená tabulka, která má tvar:

	A	B	C	D	E
Vystoupili		//	/	////	////
Nastoupili	///	///	////	/	
Jeli	///	////	//////	////	////

Z tabulky ihned vidíme, že nejvíce cestujících bylo v autobuse v úseku z C do D.

2.5 Didaktické cíle

Ve druhé etapě hra obohacuje žákovy intelektuální zkušenosti zejména ve 4 směrech:

1) **Poznání, že když k uchování procesu nestačí paměť, nutno hledat jak ji pomoci.** To je již ovoce první etapy. Didakticky klíčová je skutečnost, že tabulka nebyla žákům nabídnuta, ale že se ji nejprve oni sami pokoušeli objevit. To je zkušenost mimořádně důležitá. Když se podobná situace vyskytne na druhém stupni – žák si má sám vytvořit jistý jazyk na záznam procesu – dochází v mnoha případech k rezignaci. Žák nemá žádné zkušenosti s touto činností, protože všechny matematické jazyky, s nimiž se setkal, mu byly předloženy: jako první to byl jazyk číslic a desítkové soustavy, dále jazyk záporných čísel, zlomků, desetinných čísel, procent, rovnic, ... Žák neměl možnost pocítit, o co jsou arabské číslice účinnější než zápisy egyptské nebo římské. Myslíme, že tuto zkušenost by měl žák získat a to především na hodinách matematiky. Proto jsme proces objevování jazyka rozpracovali dokonce ve dvou prostředích: v Krokování a u Autobusu. V jiných prostředích se pak žák aspoň částečně na tvorbě nebo modifikaci jazyka podílí.

2) **Hledat pomoc znamená najít nástroj na zaznamenání procesu.** První pokusy o záznam jsou chaotické, rozvláčné, neúčinné. Počáteční neúspěch se přetaví ve finální radost z úspěchu.

3) **Tvorba nástroje většinou probíhá postupným vylepšováním.** Čím záladnější jsou otázky učitele po představení, tím vyšší je potřeba žáků vést co nejpřesnější zápis, a tím vnímavější jsou pak na nápady spolužáků, jak zápis vylepšit.

4) **Když je proces zapsán konceptem, obohatí se žákově porozumění jevu o amalgám proces-koncept.** Připomeneme pojem proceptu (Gray, Tall 1994). Když dítě říkankou *jeden, dva, tři* počítá panenky, je to proces. Když napíše *3 (panenky)*, je to koncept. Jestliže ve vědomí dítěte splynou proces i koncept do jediného poznatku, nazýváme jej proceptem.

Procept je víc než součet proces + koncept. Je to amalgám obou. Představení je proces a jeho tabulkový zápis je koncept. U představení vše probíhá v čase podle vůle výpravčích na jednotlivých zastávkách. V tabulce čas nehraje roli, zde jsou všechny zastávky a všechna vystupování i nastupování v jediném obrázku. Když si žák tabulkou zaznamenává představení, učí se konceptem zachytit proces. Když podle předložené tabulky odehraje představení, učí se z konceptu vyvodit proces. Když oba procesy střídá, začíná v jeho vědomí docházet k amalgamací procesu a konceptu.

5) **Tabulka může být účinný nástroj na popis procesu.** Toto poznání žák využije, když bude řešit úlohy o věku nejprve krokovaním a pak soubor vztahů запиše tabulkou.

3. Třetí etapa: Práce s tabulkou – přechod k formalizaci

3.1 Ilustrativní úlohy

V dalším budeme pracovat s tabulkami, ve kterých zastávky značíme písmeny. Místo slov Vystoupili, Nastoupili a Jeli jsou v tabulce pouze písmena V, N a J a konečně místo čárek na zaznamenání počtu používáme čísel. V úlohách adresovaných žákům 1. stupně ZŠ je použito tykání. Zde používáme vykání.

Čtenář, který se teď poprvé seznamuje s prostředím Autobus, získá řešením těchto úloh první vhled do dané problematiky. Podobně jako ve třídě i čtenáři doporučujeme sehrát si představení a tím přezkontrolovat svůj výsledek.

Úloha 1. V dané tabulce doplňte 5 scházejících údajů a odpovězte

	A	B	C	D	E
V		2	1	4	
N	3	3	4	1	
J					

Kdy bylo v autobusu nejvíce cestujících? Kolik lidí v autobuse přibylo/ubylo na zastávce C?

Úloha 2. V dané tabulce doplňte 5 scházejících údajů a odpovězte

	A	B	C	D	E
V		1	2	3	
N					
J	2	4	6	4	

Na které zastávce nastoupilo nejvíce cestujících? Na které zastávce nastoupilo nejméně cestujících?

Úloha 3. V dané tabulce doplňte 5 scházejících údajů a odpovězte

	A	B	C	D	E
V	0		0	3	5
N		3			0
J	4	5	6		

Kolik se celkem svezlo v autobuse cestujících? Kolik cestujících jelo jen jednu zastávku?

Úloha 4. V dané tabulce doplňte 6 scházejících údajů. Najděte všechna řešení.

	A	B	C	D	E
V	0	2	6	2	4
N	7			4	0
J					

3.2 Označení

V dalším textu budeme mluvit o řešení těchto i jiných podobných úloh. Bylo by únavné jednotlivá čísla tabulky nazývat jejich plnými jmény. Například číslo 6 v tabulce úlohy 3 popsat slovy „počet cestujících, kteří byli v autobuse, když vyjel ze zastávky C“.

Zdlouhavého vyjadřování se zbavíme, když zavedeme jazyk písmen: každé z 12 čísel tabulky pojmenujeme písmenem, jak ukazuje tato tabulka:

	A	B	C	D	E
V	0	b	d	f	h
N	a	c	e	g	0
J	a'	i	j	h'	

Číslo a je počet cestujících, kteří nastoupili na zastávce A, a číslo a' je počet cestujících, kteří odjeli ze zastávky A. Obě tato čísla jsou stejná, tedy $a = a'$. Tato rovnost pro žáky není samozřejmá, žáci ji objevují. V době, když zavádíme zápis tabulkou, už ale většina žáků tuto rovnost objevila. Stejně pak platí $h = h'$.

Pomocí písmen bude naše další vyjadřování stručnější. Samozřejmě tento jazyk algebry není určen žákům. Oni nebudou mluvit o číslu c nebo číslu d , ale o počtu cestujících, kteří nastoupili na zastávce B nebo kteří vystoupili na zastávce C apod.

3.3 Řešení úloh 1 až 4

Úloha 1. V úloze jsou uvedeny všechny údaje, které potřebujeme na odehrání představení.

Tedy nejsnadnější řešení je: budeme jízdu hrát a pokaždé doplníme do poslední řádky scházející údaj. Na zastávce A nastoupí 3 cestující a tedy, když autobus odjíždí ze zastávky A, jsou v něm 3 cestující. Na zastávce B 2 z nich vystoupí a další 3 nastoupí. Tedy když autobus vyjíždí ze zastávky B, jsou v něm $3 - 2 + 3 = 4$ cestující. Podobně ze zastávky C odjíždí 7 cestujících a ze zastávky D 4 cestující.

Když zapíšeme všechny dílčí výpočty, které jsme v úloze 1 udělali, dostaneme tuto posloupnost pěti výpočtových kroků, v nichž najdeme hledaná čísla a' , i , j , h' a h .

$$a' = a = 3$$

$$h' = j - f + g = 7 - 4 + 1 = 4$$

$$i = a' - b + c = 3 - 2 + 3 = 4$$

$$h = h' = 4$$

$$j = i - d + e = 4 - 1 + 4 = 7$$

Pět neznámých čísel je v tabulce úlohy 1. podbarveno žlutou.

Odpovědi na dvě doplňující otázky:

- Nejvíce cestujících bylo v autobuse, když opouštěl stanici C.
- Na zastávce C do autobusu přibyli 3 cestující.

Úloha 2. Předchozí proces řešení je zde nemožný. Tabulka nedovoluje odehrát celé představení ihned. Neznámé údaje musíme hledat složitěji. Posloupnost výpočtových kroků má tentokrát následující tvar.

$$a = a' = 3$$

též

$$h = h' = 4$$

$$a' - b + c = i \quad \text{tj.} \quad 2 - 1 + c = 4, \text{ tedy } c = 3$$

$$i - d + e = j \quad \text{tj.} \quad 4 - 2 + e = 6, \text{ tedy } e = 4$$

$$j - f + g = h' \quad \text{tj.} \quad 6 - 3 + g = 4, \text{ tedy } g = 1$$

Odpovědi na dvě doplňující otázky:

- Nejvíce cestujících nastoupilo do autobusu na zastávce C (4 lidé).
- Nejméně cestujících nastoupilo do autobusu na zastávce D (1 cestující).

Úloha 3. Tabulka pro úlohu 3 je ještě složitější. Pět neznámých čísel najdeme z následujících vztahů.

$$a = a' = 3$$

též

$$h = h' = 5$$

$$a' - b + c = i \quad \text{tj.} \quad 4 - b + 3 = 5 \text{ tedy } b = 2$$

$$i - d + e = j \quad \text{tj.} \quad 5 - 0 + e = 6, \text{ tedy } e = 1$$

$$j - f + g = h' \quad \text{tj.} \quad 6 - 3 + g = 5, \text{ tedy } g = 2$$

Odpovědi na dvě doplňující otázky:

- Počet cestujících, kteří se vezli autobusem, zjistíme tak, že sečteme všechny, kteří nastoupili tj. $a + c + e + g = 4 + 3 + 1 + 2 = 10$.
- Druhá otázka je složitější: Kolik cestujících jelo jen jednu zastávku? Dva cestující, kteří nastoupili na zastávce A, vystoupili na zastávce B, a tedy jeli jen jednu zastávku. Podobně dva cestující, kteří nastoupili na zastávce D, museli vystoupit na zastávce E, a tedy jeli jen jednu zastávku. Nejasné ale zůstává, zda cestující, který nastoupil na zastávce C, vystoupil hned na D, nebo jel až na E. Obě možnosti je nutno připustit. Proto odpověď na druhou otázku zní: 4 cestující určitě a možná ještě jeden další.

Úloha 4. Náročnost úlohy narostla tím, že existuje více řešení. Hodnoty $a' = a = 7$ a $h' = h = 4$ jsou nasnadě. Jednoznačně je dáno i číslo $j = h' + f - g = 4 + 2 - 4 = 2$. Další tři neznámá čísla c, i, e jsou vázána vztahy: $i = c + 5 \geq 6, e = 5 - c \geq 2$. Odtud plyne $3 \geq c \geq 1$. Pro c nastávají tedy 3 možnosti: $c = 1, 2, 3$; pak $i = 6, 7, 8$ a $e = 2, 1, 0$.

3.4 Proces řešení úloh žáky

Jak budou úlohy řešit žáci prvního ročníku?

Úlohu 1 žáci vyřeší tak, že představení sehrají a scházející čísla průběžně doplňují.

U úlohy 2 buď budou zkoušet pokus – omyl, nebo budou uvažovat „zpětně“: když autobus odjel ze zastávky A, byli v něm 2 cestující a ti museli nastoupit na zastávce A. Tedy $a = 2$. Ovšem někteří žáci to vidí okamžitě. Dále nutno najít číslo c . Autobus dojel na zastávku B a ze 2 cestujících jeden vystoupil. Tedy je zde jeden cestující. Když bude autobus ze zastávky B odjíždět, budou v něm 4 cestující. Jedna a kolik je čtyři? A tři. Tedy $c = 3$. Podobně na dalších zastávkách.

Úloha 3 je nejsložitější. Číslo $a = 4$ najdeme stejně jako u úlohy 2. Číslo b je ukryto pod trojicí čísel 4, 3 a 5. Uvažujeme. Když autobus přijel na zastávku B, byli v něm 4 cestující. Pak někdo vystoupil a 3 další přistoupili. Nakonec tam bylo 5 cestujících. Kdyby vystoupil jeden (pokus – omyl), zůstane tam nakonec 6 cestujících. To je moc. Kdyby vystoupili dva zůstane tam 5 cestujících. To je dobře. Tedy $b = 2$. Podobně dále.

U této úlohy může mezi žáky vzniknout spor o to, zda nejméně lidí nastoupilo na zastávce D, kde nastoupil pouze 1 cestující, nebo na konečné zastávce E, kde nenastoupil žádný. Spory tohoto typu jsou vždy vítány. Pomáhají upřesnit pravidla hry. V tomto případě bude třídou přijato pravidlo: na zastávce A nikdo nevystoupil a na zastávce E nikdo nenastoupil. Tato okna tabulky doplníme číslem 0, ale do dalších úloh tato čísla brát nebudeme. V úloze 3 již v obou oknech je číslo 0.

Úloha 3 má jednoznačné řešení, ale druhá doplňující otázka je náročná. Žáci zde musí představení sehrát a evidovat jednotlivé cestující. Žák vidí, že tabulka, která jednoznačně popíše počty cestujících, nezachytí cestující individuálně. To je pro některé žáky překvapivé. Úlohu 4 řeší žáci metodou pokus-omyl. Zvolí $c = 0$, najdou $i = 5$ a zjistí, že toto řešení není možné, neboť na zastávku C přijede jen 5 lidí a zde má 6 lidí vystoupit. Zvolí tedy $c = 1$, najdou $i = 6$ a pak $e = 2$. Dále zvolí $c = 2$, najdou $i = 7$ a pak $e = 1$. Konečně zvolí $c = 3$, najdou $i = 8$ a pak $e = 0$. Další řešení nejsou možná.

3.5 Didaktické cíle

Třetí etapa přispívá k rozvoji žákových matematických schopností a zkušeností ve více směrech:

1) **Odhalování vztahů cestou „od izolovaných modelů k modelu generickému“.** V tabulce autobusu je 6 základních typů vztahů. První se vztahuje k zastávkám A a E: Vztahy I.

$$a = a' \quad a \quad h = h'$$

Další typy se vztahují k zastávkám B, C a D. Každá je propojena na čtveřici čísel:

Do = počet cestujících, kteří na zastávku dojeli,
 Vy = počet těch, co zde vystoupili,
 Na = počet těch, co zde nastoupili a
 Od = počet těch, co ze zastávky odjeli.

Když tři z těchto čtyř čísel známe, umíme najít i čtvrté. Podle toho, které číslo hledáme, rozlišujeme 4 typy vztahů:

Vztahy II. $Od = Do - Vy + Na$ (tj. $i = a' - b + c$, $j = i - d + e$, $h' = j - f + g$)
 Vztahy III $Na = Od + Vy - Do$ (tj. $c = i + b - a'$, $e = j + d - i$, $g = h' + f - j$)
 Vztahy IV $Vy = Do - Od + Na$ (tj. $b = a' - i + c$, $d = i - j + e$, $f = j - h' + g$)
 Vztahy V $Do = Od + Vy - Na$ (tj. $a' = i + b - c$, $i = j + d - e$, $j = h' + f - g$)

Poslední typ vztahů dělí čtveřici čísel na dva páry:

Vztahy VI $Od - Do = Na - Vy$ (když $Od \geq Do$), $Do - Od = Vy - Na$ (když $Do \geq Od$)
 (tj. $i - a' = c - b$ (když je $i \geq a'$) nebo $a' - i = b - c$ (když je $a' \geq i$),
 $j - i = e - d$ (když je $j \geq i$) nebo $i - j = d - e$ (když je $i \geq j$),
 $h' - j = g - f$ (když je $h' \geq j$) nebo $j - h' = f - g$ (když je $j \geq h'$)).

Každý žákův objev některého z uvedených vztahů je důsledek jeho evidence v několika konkrétních případech – izolovaných modelech. Ve vědomí žáka se vztah neobjeví v té formulaci, jak je uvedeno výše, ale jako návod na určitý postup, jako generický model.

2) **Proces řešení úloh vede k odhalování vztahů mezi 4 čísly.** Z matematického hlediska jsou vztahy II až VI stejné. Když ale sledujeme řešitelský proces žáka, vidíme, že pro něj jsou tyto vztahy různé. Nejsnazší je vztah II, neboť zde výsledné číslo Od získáme jako důsledek představení: od těch, co přijeli, odečteme ty, co vystoupili, přičteme ty, co nastoupili, a máme ty, co odjedou. Další tři vztahy již tak snadné nejsou. Například, když je nutno k řešení použít vztah III, většina žáků postupuje ve dvou krocích. Nejprve si uvědomí, že po vystoupení zůstane v autobuse $Do - Vy$ cestujících. Toto číslo najdou. Pak se ptají, co k němu nutno přičíst, abychom dostali číslo Od. Podobně ve dvou krocích je řešena i úloha vyžadující vztah IV. Nejprve žáci zjistí, že po tom, co cestující vystoupí, je v autobuse $Od - Na$ cestujících. Toto číslo najdou. Pak se ptají, co je nutno od čísla Do odečíst, abychom dostali toto číslo. Dodejme, že tento vztah se jeví jako nejnáročnější. Úloha vyžadující použití vztahu V se dá řešit „zpětně“, jak je uvedeno v 3.2.

3) **Zvýšení kvality poznatku: od poznání v činnosti k poznání ve slovech.** Žák, který úlohy řeší individuálně a použije k řešení některé vztahy, nemá potřebu použít vztahy popsat. Jeho znalost těchto vztahů je znalostí v činnosti (knowledge in action). Pouze když o jeho způsob řešení má zájem někdo jiný, vznikne potřeba svůj objev artikulovat. Žák hledá výrazové prostředky, jak myšlenku formulovat. Použije buď sémantický jazyk, nebo jazyk tabulky, nejčastěji ale oba jazyky současně. Tak například vztah I popíše slovy (asi ne tak uhlazeně, jak to děláme my)

*Ti, co nastoupili na zastávce A, jsou ti, co pak dále jedou, resp.
 Ti, co na zastávku E dojeli, jsou ti, kteří zde vystoupí.*

nebo v jazyce tabulky

Tato čísla (prstem ukáže na okna a a a' resp. okna h a h') jsou stejná.

Podobně žák může slovy popsat i další vztahy. Například vztahy II popíše slovy:

Když od těch, co přijeli, odečteme ty, co vystoupili a přidáme ty, co nastoupili, dostaneme ty, co odjedou.

Nebo vztahy VI popíše slovy:

Když od těch, co odjedou, odečtu ty, co dojeli, dostanu totéž jako když od těch, co nastoupili, odečtu ty, co vystoupili.

Žák zde obvykle necítí potřebu zvažovat oba možné případy $Od \geq Do$ i $Do \geq Od$ a uvede jen ten, který je aktuální, ale myslí, že jeho výpověď zahrnuje i druhý případ. Dodejme, že připustíme-li i čísla záporná, je tento předpoklad v pořádku.

Žák, který svoji myšlenku artikuluje, posouvá svoji znalost v činnosti (knowledge in action) na znalost ve slovech (knowledge in words). K uvedenému posunu s velkou pravděpodobností dojde i u žáka, který sám zákonitost neartikuluje, ale který je účasten debaty, ve které je zákonitost formulována. Takový posun vyvolá učitel tím, že iniciuje mezi žáky debatu o tom, jak kdo danou úlohu řešil. To se samozřejmě nevztahuje pouze na prostředí autobusu, ale poznávací proces vůbec.

Artikulaci myšlenky žák citově hodnotí jako námahu, která mu pomáhá lépe do věci nahlédnout. V důsledku toho se u něj vytváří meta-kognitivní potřeba zkvalitňovat vlastní myšlení tím, že poznatky artikuluje ať již verbálně, nebo písemně.

4) **Poznávání nerovnic a nerovností v sémantických situacích.** V úloze 4 jsme viděli, jak se reálná omezení typu „z autobusu nemůže vystoupit více cestujících než v něm je“ a „do autobusu nemůže nastoupit více cestujících než je počet těch, kteří se v něm pak povezou“ mění na rovnice typu $3 \geq c \geq 1$. Přitom žáci v této etapě nerovnosti nezapisují jako nerovnosti, ale dochází k nim zvažováním možných a nemožných případů zkoumané situace.

5) **Nabývání zkušeností s relací propojující 4 čísla (přesněji dva páry čísel).** Vztahy VI se od všech předchozích vztahů liší tím, že nejsou výpočtové. Všechny další vztahy byly výpočtové, tzn. dávaly návod, jak z několika známých čísel najít číslo jiné. Vztahy VI to neukazují, ale přesto je někteří žáci zcela spontánně formulují v diskusi třídy. Proč? Protože vztah $Od - Do = Na - Vy$ odhaluje lepší porozumění celé situaci. Jestliže se na vztahy I až V lze dívat jako na poznatky procesuální (jak vypočíst?), tak vztah VI je konceptuální (jak se věci mají). Právě odhalení vztahu VI se nám jeví jako klíčové proniknutí do prostředí schématu autobus.

Vztah VI má vážné místo v matematickém vývoji žáka, protože mu poprvé umožní objevit konceptuální vztah 4 parametrů. Taková relace se v tradiční matematice na 1. stupni nevyskytuje. Poprvé se objeví v trojčlence, nebo v jejím speciálním případě ve výpočtech procent. Potíže, které obě tyto situace na druhém stupni žákům způsobují, jsou dobře známé. Jsme přesvědčeni, že závažnou příčinou potíží je skutečnost, že relace, se kterou pracujeme, obsahuje 4 čísla. Většina žáků pak tuto relaci nedokáže uchopit jako koncept a omezí se na návody, kterými lze řešit příslušné úlohy. Když se ale objeví úloha, ve které je kromě standardního postupu nutno uskutečnit i něco navíc, tyto žáci rezignují.

6) **Odhalení globálního vztahu VII.** Poslední důležitý vztah, který jsme zatím nezmínili a který žáci po jisté době odhalí, zní: *když sečtu všechny, co nastoupili, dostanu totéž, jako když sečtu všechny, co vystoupili.* Symbolicky: $b + d + f + h = a + c + e + g$.

4. Čtvrtá etapa: Slovně formulované podmínky s tabulkou nebo bez tabulky

Ilustrací úloh s tabulkou, ke kterým jsou některé podmínky formulovány slovně, je

Úloha 5. Doplňte tabulku, když víte, že na každé ze zastávek A, B, C a D nastoupil

	A	B	C	D	E	stejný počet lidí a na zastávce C všichni, co sem dojeli, vystoupili.
V	0			0	6	
N					0	
J			5			

Řešení. Žáci řeší úlohu nejčastěji metodou pokus-omyl a hned představení hrají. Například si řeknou, že na každé zastávce nastoupí 2 cestující. Když ale uvažují o počtu cestujících, kteří na zastávce B vystoupí, zjistí, že jejich předpoklad je chybný. Ze zastávky B v žádném případě nemůže odjet 5 cestujících. Tak zvýší počet cestujících, kteří na každé zastávce nastoupí, na 3. Tentokrát již úlohu dořeší. Mohou případně zkusit, jestli úloha nemá i druhé řešení, ale k tomu dojde obyčejně jen na výzvu učitele. Sofistikovanější řešení žáka 5. ročníku, který pracuje s písmenem. Označme písmenem n počet lidí, kteří nastoupili na zastávce A. Tých počet nastoupil i na zastávkách B, C a D. Na zastávku C dojelo 5 lidí a všichni zde vystoupili. Na C nastoupilo n lidí, na D žádný nevystoupil a nastoupilo zde n lidí. Tedy na E dojelo $2n$ lidí, a to je 6. Proto $n = 3$. Zbytek je jednoduchý.

Ilustrací úloh bez tabulky určených jen několika podmínkami formulovanými slovně je následující úloha 6.

Úloha 6. Popište jízdu autobusem, když víte, že na každé zastávce nastoupil vždy stejný počet cestujících, na zastávkách B a C nevystoupil žádný a na zastávkách D a E vystoupili pokaždé 4 cestující.

Řešení. Žáci si nakreslí tabulku a postupují opět metodou pokus-omyl. Sofistikované řešení je založeno na poznání vztahu VII:

$$b + d + f + h = a + c + e + g.$$

Víme, že vystoupilo 8 lidí. Proto i nastoupilo 8 lidí, a tedy na každé zastávce nastoupili dva.

Náročnější modifikace předchozí úlohy je úloha 6a.

Úloha 6a. Popište jízdu autobusem, když víte, že na každé zastávce nastoupil vždy stejný počet cestujících, na zastávkách B a C nevystoupil žádný, na zastávce D vystoupilo 5 cestujících a na zastávce E méně než 7 cestujících.

5. Pátá etapa: Rozlišení cestujících na muže a ženy

Počet evidovaných údajů o jízdě autobusem se zdvojnásobí, jestliže cestující dělíme na muže a ženy. U představení musíme zvolit dva druhy objektů znázorňující cestující. Například muži budou litrové lahve a ženy půllitrové. Nebo použijeme zátky od lahví a muži budou modré zátky, ženy červené.

V zápisech do tabulky to můžeme udělat tak, že každé okénko tabulky rozdělíme na dvě – na muže a ženy, nebo ponecháme jedno okénko a muže i ženy budeme rozlišovat pomocí ikon. Teď volíme druhou z těchto možností: ikonka pro muže bude \square , ikonka pro ženu bude Δ .

Úloha 7. Doplň tabulku pro jízdu autobusem, ve které odlišujeme muže a ženy.

	A	B	C	D	E
V	0	\square	Δ	Δ	$\square\square\square\Delta\Delta$
N	$\square\square$	$\Delta\Delta$	$\square\Delta$		0
J		$\square\square$			

Řešení. Někteří žáci k řešení použijí představení, jiným stačí simulované představení a dost žáků řeší úlohu přímo z tabulky. Nejnáročnější je pole „Nastoupili v D“. K jeho vyřešení musíme nejprve vyřešit tři okna v řádce „Jeli“. První dvě vyplníme lehce: z B do C jeli $\square\Delta\Delta$, z C do D jeli $\square\square\Delta\Delta$. Do E dojeli $\square\square\square\Delta\Delta$ a ti tedy byli v autobuse v úseku od D do E.

6. Šestá etapa: Možné přesahy do jiných oblastí

Ze spektra možností využití prostředí autobus pro rozvoj dalších matematických schémat vybíráme ilustrativně tři.

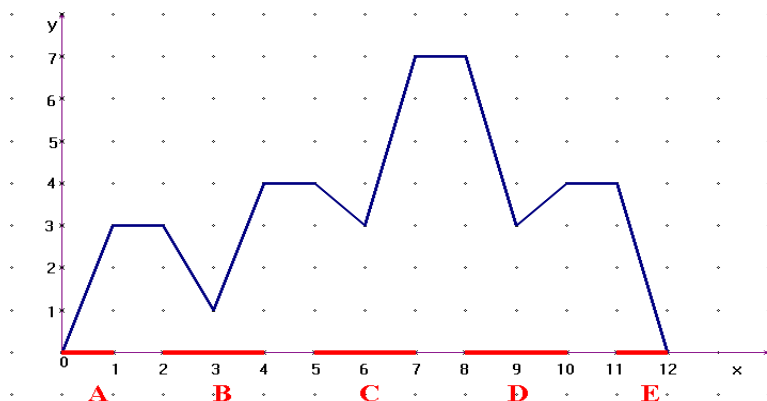
a) Stochastické nastupování a vystupování

Házíme dvěma hracími kostkami a číslo 6 uvažujeme jako 0. Na první zastávce hodíme jen jednou kostkou. Počet ok určí počet nastupujících. U dalších zastávek házíme dvěma kostkami a menší číslo znamená počet vystupujících a větší číslo znamená počet nastupujících. Samozřejmě na poslední zastávce již kostkou neházíme a necháme vystoupit všechny cestující, kteří sem dojeli. Úloha najít pravděpodobnost jevu $P(n)$: na poslední zastávku dojelo n cestujících, je náročná. Nicméně zkušenost, kterou žáci získají, když udělají dostatečný počet experimentů, jim otevře cestu k hledání intuitivních zákonitostí. Například žák si řekne, že nejpravděpodobnější je, že na každé zastávce přibudou asi dva cestující, tudíž nejpravděpodobnější je, že na zastávku E dojede 8 cestujících. Ve vyšších ročnících je možné přistoupit i k počítání pravděpodobností, jestliže snížíme počet zastávek. Když jsou zastávky pouze 2 a tedy házíme jen jednou kostkou, tak pravděpodobnost, že se povezu např. 2 cestující je stejná, jako pravděpodobnost, že se jich poveze 5, a to je $1/6$. Ale již případ, že mezi nástupní a výstupní bude ještě jedna zastávka, je podstatně náročnější. Pravděpodobnost, že na konečnou nedojede žádný cestující je $1/36$, pravděpodobnost, že na konečnou dojede pouze jeden cestující je $1/36 + 5/104 = 2/27$ atd. Výhodou této úlohy je, že umožňuje zcela přirozené gradování sémanticky dobře zdůvodněné.

b) Individualizace cestujících

Do této chvíle jsme cestující nerozlišovali z hlediska jejich délky jízdy. Teď si položíme otázku, jak asi jednotliví cestující nastupovali a vystupovali. Například u úlohy 7 je jasné, že jeden muž jel pouze z A do B, jeden z A do E a jeden z C do E. Zde je tedy naše informace o mužích jednotlivcích úplná. U žen to tak ale není. Nevíme totiž, zda žena, která nastoupila na zastávce C, vystoupila na zastávce D, nebo až na zastávce E. Víme, že jedna z žen, co nastoupila na B, vystoupila na C, ale ta druhá mohla vystoupit jak na D, tak na E. Tyto úlohy se stanou sémanticky ještě přitažlivější, když začneme mluvit o penězích. Například, když jízdné za jednu zastávku bude například 5 Kč, za dvě 8 Kč, za tři nebo 4 zastávky 10 Kč.

c) Proces nastupování a vystupování v úloze 8 je popsán i grafikonem na obrázku 1.



Obr. 1

Úsečka grafu od bodu $[0,0]$ k bodu $[1,3]$ reprezentuje tři cestující, kteří nastoupili na zastávce A, úsečka $[1,3] - [2,3]$ reprezentuje tyto tři cestující, jak jeli z A do B, úsečka $[2,3] - [3,1]$ reprezentuje dva cestující, kteří vystoupili na zastávce B atd. Nakonec úsečka $[11,4] - [12,0]$ reprezentuje 4 cestující, kteří vystoupili na konečnou.

Uvedenému grafu lze dát i jinou sémantickou interpretaci. Když graf promítneme na osu y , vidíme, že může zachycovat proces: tři „kroky“ nahoru, stůj, dva „kroky“ dolů, tři „kroky“ nahoru, ... Tato interpretace dostala jméno Krokování. Prostředí Krokování je rovněž podrobně rozpracováno jako didaktické prostředí (podobně jako Autobus). Grafikon na obrázku 1 přesně popisuje jednu produkci Autobusu i jednu produkci Krokování. Každé z těchto prostředí přináší do vědomí žáka kromě toho, co mají společné, specifické obohacení.

Autobus přináší zkušenosti s ternární situací (viz bod 5 z 3.5). Krokování otevírá cestu k záporným číslům pomocí povelů typu: jeden krok dopředu a tři dozadu. Navíc umožňuje sémantizovat didakticky náročný jev „mínus před závorkou“ povelom „čelem vzad“.

7. Úlohy – soubor řešených úloh

8.		A	B	C	D	E	Nejvíce lidí jelo v autobuse ze zastávky A na zastávku E . Na zastávce C v autobuse přibyli/ubyli 4 lidé.
	V		2	1	4		
	N	3	3	4	1		
	J						

Ř 8.		A	B	C	D	E	Nejvíce lidí jelo v autobuse ze zastávky C na zastávku D . Na zastávce C v autobuse přibyli/ubyli 3 lidé.
	V		2	1	4	4	
	N	3	3	4	1		
	J	3	4	7	4		

9.		A	B	C	D	E	Na zastávce B v autobuse přibyli/ubyli 3 lidé. Na zastávce D v autobuse přibyli/ubyli 3 lidé. Celkem se v autobuse vezlo 15 lidí.
	V		1	2	3	3	
	N					0	
	J	2	4	5			

Ř 9.		A	B	C	D	E	Na zastávce B v autobuse přibyli/ubyli 2 lidé. Na zastávce D v autobuse přibyli/ubyli 2 lidé. Celkem se v autobuse vezlo 9 lidí.
	V		1	2	3	3	
	N	2	3	3	1	0	
	J	2	4	5	3		

Komentář. To, že na zastávce B v autobuse přibyli 2 lidé, lze zjistit dvěma způsoby:
1) vidím, co se dělo na zastávce (1 vystoupil, 3 nastoupili).
2) podívám se jen na řádek Jeli. Vidím, že na zastávku B přijeli 2 lidé a 4 z ní odjížděli. Tedy do autobusu přibyli 2 cestující. Tento druhý způsob řešení je náročnější a žáci jej možná objeví až při dalších úlohách tohoto typu.

10.		A	B	C	D	E	Na zastávce A nastoupili 2 lidé.
	V			4		3	
	N		3		1	0	
	J	5	7	5			

Ř 10.		A	B	C	D	E	Na zastávce C nastoupili 2 lidé.
	V		1	4	3	3	
	N	5	3	2	1	0	
	J	5	7	5	3		

11.		A	B	C	D	E	Na zastávkách A, B a C do autobusu celkově nastoupilo 18 lidí. Na zastávce C v autobuse přibyli/ubyli 2 lidé
	V			4		18	
	N		7		9	0	
	J	8	12	14			

Ř 11.		A	B	C	D	E	Na zastávkách A, B a C do autobusu celkově nastoupilo 21 lidí. Na zastávce C v autobuse přibyli/ubyli 2 lidé
	V		3	4	5	18	
	N	8	7	6	9	0	
	J	8	12	14	18		

12.		A	B	C	D	E	Na zastávce vystoupila z autobusu polovina cestujících.
	V			5		13	
	N		3		2	0	
	J	11	10	14			

Ř 12.		A	B	C	D	E	Na zastávce C vystoupila z autobusu polovina cestujících.
	V		4	5	3	13	
	N	11	3	9	2	0	
	J	11	10	14	13		

Komentář. Doplnující otázka je náročná. Doporučujeme odehrát dvakrát celé představení a při druhé produkci u každé zastávky evidovat, kolik bylo v autobusu lidí a kolik z nich vystoupilo: Na zastávku B přijelo 11 lidí a 4 z nich vystoupili; to je méně než polovina. Na C přijelo 10 lidí a 5 z nich vystoupilo; to je polovina. Na D přijelo 14 lidí a 3 z nich vystoupili; to je méně než polovina. Tedy jen na zastávce C z autobusu vystoupila polovina z těch, co byli v autobuse.

13.		A	B	C	D	E	Nejvíce lidí bylo v autobuse na cestě ze zastávky do zastávky . Bylo to cestujících.
	V			7		29	
	N		8		7	0	
	J	26	26	26			

Ř 13.		A	B	C	D	E	Nejvíce lidí bylo v autobuse na cestě ze zastávky D do zastávky E . Bylo to 29 cestujících.
	V		8	7	4	29	
	N	26	8	7	7	0	
	J	26	26	26	29		

Komentář. Cílem druhé části úlohy je dát žákům zkušenost s poznatkem: každý cestující musí nastoupit i vystoupit, a proto je počet všech, co nastoupili, stejný jako počet všech, co vystoupili.

14.		A	B	C	D	E	Na zastávce do autobusu nastoupilo 2krát více lidí, než z něj vystoupilo. Na zastávce D do autobusu nastoupilo krát více lidí, než z něj vystoupilo.
	V			4		19	
	N		3		6	0	
	J	9	11	15			

Ř 14.		A	B	C	D	E	Na zastávce C do autobusu nastoupilo 2krát více lidí, než z něj vystoupilo. Na zastávce D do autobusu nastoupilo 3 krát více lidí, než z něj vystoupilo.
	V		1	4	2	19	
	N	9	3	8	6	0	
	J	9	11	15	19		

15.		A	B	C	D	E	Na zastávce A do autobusu nastoupilo 5 lidí a na každé další vždy o 1 člověka více než na předešlé. Na zastávce E ale nenastoupil žádný.
	V		3	4	9		
	N					0	
	J						

Ř 15.		A	B	C	D	E	Komentář. Nový prvek v úlohách. Kromě údajů v tabulce jsou vedle připsány další podmínky. Z nich zjistíme, že na zastávkách A, B, C a D postupně nastoupilo 5, 6, 7 a 8 lidí. Zbytek je již jednoduchý.
	V		3	4	9	10	
	N	5	6	7	8	0	
	J	5	8	11	10		

16.		A	B	C	D	E	Na zastávce B nastoupilo do autobusu 2krát více lidí, než z něj vystoupilo. Totéž i na zastávce D.
	V		2	4		13	
	N				6	0	
	J	7					

Ř 16.		A	B	C	D	E	
	V		2	4	3	13	
	N	7	4	3	6	0	
	J	7	9	8	13		

17.		A	B	C	D	E	Na každé ze zastávek A, B, C, D do autobusu nastoupil stejný počet lidí.
	V		4	0	11	9	
	N					0	
	J						

Ř 17.		A	B	C	D	E	
	V		4	0	11	9	
	N	6	6	6	6	0	
	J	6	8	14	9		

18.		A	B	C	D	E	Na zastávce B přibyli do autobusu 3 cestující a na zastávce D z něj ubyli 2 cestující.
	V			4		10	
	N	9	8		3	0	
	J						

Ř 18.		A	B	C	D	E	
	V		5	4	5	10	
	N	9	8	4	3	0	
	J	9	12	12	10		

19.		A	B	C	D	E	□ = muž, Δ = žena Na zastávce E z autobusu vystoupili <input type="text"/> muži a <input type="text"/> ženy.
	V	0	□	Δ	Δ	□□□ΔΔ	
	N	□□	ΔΔ	□Δ		0	
	J	□□					

Ř 19.		A	B	C	D	E	Na zastávce E z autobusu vystoupili <input type="text"/> muži a <input type="text"/> ženy.
	V	0	□	Δ	Δ	□□□ΔΔ	
	N	□□	ΔΔ	□Δ	□Δ	0	
	J	□□	□ΔΔ	□□ΔΔ	□□□ΔΔ		

Komentář. Vstupujeme do čtvrté etapy prostředí autobus. V první etapě se žáci naučili hru hrát. Ve druhé se naučili tabulkou zaznamenat průběh hry. Ve třetí etapě se učili doplňovat částečně vyplněné tabulky. Teď ve čtvrté etapě rozdělíme cestující na muže a ženy. Úvaha probíhá stejně jako dříve, ale musíme uvažovat zvlášť muže a zvlášť ženy (viz další úloha).

20.		A	B	C	D	E	Na zastávce B do autobusu nastoupili _____ muži a _____ ženy. Na zastávce B do autobusu přibyli _____ muži a _____ ženy.
	V	0	□	□△△	□△△△		
	N	□□ △	□□ △△△	□□□ △△	□△△△	0	
J	□□△						

Ř 20. Úlohu můžeme řešit ve dvou částech. Nejprve řešíme jen úlohu o mužích, pak jen o ženách a teprve pak oba dílčí výsledky zapíšeme do společné tabulky.

□	A	B	C	D	E	△	A	B	C	D	E
V	0	1	1	1	5	V	0	0	2	3	4
N	2	2	3	1	0	N	1	3	2	3	
J		2	3	5	5	J		1	4	4	4

Spojením dílčích výsledků máme řešení:

	A	B	C	D	E
V	0	□	□△△	□△△△	□□□□△△△△
N	□□△	□□△△△	□□□△△	□△△△	0
J	□□△	□□□△△△△	□□□□△△△△	□□□□△△△△	

21.		A	B	C	D	E	V autobuse se vezlo celkem _____ mužů a _____ žen. Celkem _____ lidí.
	V	0	□△		□□□△△	□□△△△△	
	N	□□△△		□□□△△		0	
J			□□△△△	□□□□△△△			

Ř 21. V autobuse se vezlo celkem **7** mužů a **9** žen. Celkem **16** lidí.

	A	B	C	D	E
V	0	□△	□△△	□□□△△	□□△△△△
N	□□△△	□△△	□□□△△	□△△△	0
J	□□△△	□□△△△	□□□□△△△	□□△△△△	

22.		A	B	C	D	E	Nejvíce cestujících bylo v autobuse na cestě ze zastávky _____ do zastávky _____. Bylo to _____ mužů a _____ žen. Celkem _____ lidí.
	V	0	□	□□△			
	N		□□△△△		□△△△	0	
J	□□□△		□□□□△△△△	□□□			

Ř 22. Nejvíce cestujících bylo v autobuse na cestě ze zastávky **C** do zastávky **D**. Bylo to **5** mužů a **5** žen. Celkem **10** lidí.

	A	B	C	D	E
V	0	□	□□△	□□□ △△△△	□□□ △△△△
N	□□□△	□□△△△	□□□△△	□△△△	0
J	□□□△	□□□□ △△△△	□□□□ △△△△	□□□ △△△△	

23.		A	B	C	D	E	Na zastávce _____ vystoupili 2 muži a _____ ženy. Na _____ nastoupili 3 ženy a _____ muži. Na _____ vystoupili 4 cestující. Byli to _____ ženy a _____ muži.
	V	0	□	□□△△			
	N		□□△	□□□△	□△△	0	
J			□□□△△△△		□□△△△		

Ř 23.		A	B	C	D	E	Na zastávce C vystoupili 2 muži a 2 ženy. Na A nastoupili 3 ženy a 2 muži. Na C vystoupili 4 cestující. Byli to 2 ženy a 2 muži.
	V	0	□	□□△△	□□□△△	□□△△△	
	N	□□△△△	□□△	□□□△	□△△	0	
	J	□□△△△	□□□△△△△	□□□□△△△	□□△△△		

24.		A	B	C	D	E	Ze zastávky B na zastávku C jelo <u> </u> cestujících. Z toho byli <u> </u> muži a <u> </u> ženy. Nejméně cestujících jelo v autobuse na cestě ze zastávky <u> </u> do zastávky <u> </u> . Byli to <u> </u> muži a <u> </u> ženy, celkem <u> </u> cestující.
	V	0					
	N		□□△△△	□□□△	□△	0	
	J	□□△	□□□ △△△△	□□□□□ △△△	□□□□ △		
C	3						

Ř 24.		A	B	C	D	E	Ze zastávky B na zastávku C jelo 7 cestujících. Z toho byli 3 muži a 4 ženy. Nejméně cestujících jelo v autobuse na cestě ze zastávky A do zastávky B . Byli to 2 muži a 1 ženy, celkem 3 cestující.
	V	0	□	□△△	□□△△△	□□□□△	
	N	□□△	□□△△△	□□□△	□△	0	
	J	□□△	□□□ △△△△	□□□□□ △△△	□□□□ △		
C	3	7	8	5			
Komentář. Tabulka se rozšiřuje o další řádek celkem. To otevírá další možnosti, jak tvořit úlohy z tohoto prostředí. Dříve, než takové úlohy žákům položíme, musíme jim umožnit seznámit se s novou formou tabulky pomocí úloh, které již znají.							

25.		A	B	C	D	E	Na <u> </u> nevystoupil žádný muž. Nastoupilo zde žen. Na <u> </u> nevystoupila žádná žena. Nastoupilo zde <u> </u> mužů.
	V	0	△	□□□	□□△△△	□□△△	
	N				□	0	
	J	□□□△△	□□□□□△△△△				
C					4		

Ř 25.		A	B	C	D	E	Na zastávce B z autobusu nevystoupil žádný muž. Nastoupilo zde 3 žen. Na zastávce C z autobusu nevystoupila žádná žena. Nastoupilo zde 1 mužů.
	V	0	△	□□□	□□△△△	□□△△	
	N	□□□△△	□□△△△	□△	□	0	
	J	□□□ △△	□□□□□ △△△△	□□□ △△△△△	□□△△		
C	5	9	8	4			

26.		A	B	C	D	E	Na C nastoupilo více mužů/žen než žen/mužů. Na B nastoupilo <u> </u> cestujících.
	V	0	0	0	□□□□△	△△△	
	N					0	
	J	□△△		□□□□△△△△			
C		4	8	3			

Ř 26.		A	B	C	D	E	Na C nastoupilo více mužů/žen než žen/mužů. Na B nastoupilo 1 cestujících.
	V	0	0	0	□□□□ Δ	ΔΔΔ	
	N	□ΔΔ	Δ	Δ□□□	0	0	
	Jelo	□ΔΔ	□ΔΔΔ	□□□□ΔΔΔΔ	ΔΔΔ		
	Celkem	3	4	8	3		

27.		A	B	C	D	E	Na zastávce z autobusu vystoupily všechny ženy, které se na zastávku dovezly.
	V	0	Δ	□□ΔΔΔ	□□□ΔΔ	□Δ	
	N					0	
	Jelo	□ΔΔ		□□□□ΔΔΔ			
	Celkem			6	7	2	

Ř 27		A	B	C	D	E	Na zastávce C z autobusu vystoupily všechny ženy, které se na zastávku dovezly.
	V	0	Δ	□□ΔΔΔ	□□□ΔΔ	□Δ	
	N	□ΔΔ	□□ΔΔ	□□□ΔΔΔ	0	0	
	Jelo	□ΔΔ	□□□ΔΔΔ	□□□□ΔΔΔ	□Δ		
	Celkem	3	6	7	2		

28.		A	B	C	D	E	Nejvíce žen nastoupilo na . Nejméně žen nastoupilo na . Nejvíce mužů vystoupilo na . Nejméně mužů vystoupilo na .
	V	0				□□Δ	
	N		ΔΔΔΔ	□Δ	0	0	
	Jelo	□□□□		□□□ΔΔΔ			
	Celkem		6				

Ř 28.		A	B	C	D	E	Nejvíce žen nastoupilo na B . Nejméně žen nastoupilo na A a D . Nejvíce mužů vystoupilo na B a E . Nejméně mužů vystoupilo na C .
	V	0	□□	ΔΔ	□□ΔΔ	□□Δ	
	N	□□□□	ΔΔΔΔ	□Δ	0	0	
	Jelo	□□□□	□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔΔ	□□Δ		
	Celkem	4	6	6	3		

29.		A	B	C	D	E	V autobuse se celkem vezlo mužů a žen.
	V	0	□□ΔΔ	□ΔΔΔ	□□□Δ		
	N	□□□	□	□□□	□	0	
	J	ΔΔΔΔ	ΔΔΔΔ	ΔΔ	ΔΔ		
	C						

Ř 29.		A	B	C	D	E	V autobuse se celkem vezlo 8 mužů a 8 žen.
	V	0	□□ΔΔ	□ΔΔΔ	□□□Δ	□□ΔΔ	
	N	□□□ΔΔΔΔ	□ΔΔ	□□□Δ	□Δ	0	
	J	□□□ΔΔΔΔ	□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔ	□□ΔΔ		
	C	4	8	10	7		

30.		A	B	C	D	E	Na B nastoupili muži a ženy. Na B do autobusu přibyli muži a ženy.
	V	0	□	□ ΔΔ	□ ΔΔΔ		
	N	□□Δ	□□ΔΔΔ	□□□ ΔΔ	□ ΔΔΔ	0	
	J	□□Δ					

Ř 30.		A	B	C	D	E	Na B nastoupili 2 muži a 3 ženy. Na B do autobusu přibyli 1 muži a 3 ženy.
	V	0	□	□ ΔΔ	□ ΔΔΔ	□□□□ΔΔΔΔ	
	N	□□Δ	□□ΔΔΔ	□□□ ΔΔ	□ ΔΔΔ	0	
	J	□□Δ	□□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔΔΔ		

31.		A	B	C	D	E	Nejvíce cestujících bylo v autobuse na cestě z □ do □. Bylo to □ mužů a □ žen, celkem □ lidí.
	V	0	□	□□Δ			
	N		□□ΔΔΔ		□ΔΔΔ	0	
J	□□□Δ			□□□□ ΔΔΔΔΔ	□□□ ΔΔΔΔ		

Ř 31.		A	B	C	D	E	Nejvíce cestujících bylo v autobuse na cestě z C do D. Bylo to 5 mužů a 5 žen, celkem 10 lidí.
	V	0	□	□□Δ	□□□ΔΔΔΔ	□□□ΔΔΔΔ	
	N	□□□Δ	□□ΔΔΔ	□□□ΔΔ	□ΔΔΔ	0	
	J	□□□Δ	□□□□ ΔΔΔΔ	□□□□ ΔΔΔΔΔ	□□□ ΔΔΔΔ		

32.		A	B	C	D	E	Z B do C jelo □ cestujících. Z toho □ m. a □ ž. Nejméně cestujících jelo z □ do □. Byli to □ muži a □ žena, celkem □ cestující.
	V	0					
	N		□□ΔΔΔ	□□□Δ	□Δ	0	
	Jelo	□□Δ	□□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔΔ	□□□□Δ		
	Celkem	3					

Ř 32.		A	B	C	D	E	Z B do C jelo 7 cestujících. Z toho 3 m. a 4 ž. Nejméně cestujících jelo z A do B. Byli to 2 muži a 1 žena, celkem 3 cestující.
	V	0	□	□ ΔΔ	□□ΔΔΔ	□□□□Δ	
	N	□□Δ	□□ΔΔΔ	□□□Δ	□Δ	0	
	Jelo	□□Δ	□□□ΔΔΔΔ	□□□□ΔΔΔ	□□□□Δ		
	Celkem	3	7	8	5		

33.		A	B	C	D	E	Na zastávce C nastoupilo do autobusu více mužů/žen než žen/mužů. Na zastávce B nastoupilo do autobusu □ cestujících.
	V	0	0	ΔΔΔ	□□□□Δ	ΔΔΔ	
	N					0	
	Jelo	□□Δ		□□□□ΔΔΔΔ			
	Celkem		4	8	3		

Ř 33.		A	B	C	D	E	Na zastávce C nastoupilo do autobusu více mužů/žen než žen/mužů. Na zastávce B nastoupilo do autobusu 1 cestujících.
	V	0	0	ΔΔΔ	□□□□Δ	ΔΔΔ	
	N	□□Δ	Δ	□□□ΔΔΔΔ	0	0	
	Jelo	□□Δ	□□ΔΔ	□□□□ΔΔΔΔ	ΔΔΔ		
	Celkem	3	4	8	3		

34.		A	B	C	D	E	Z <input type="text"/> do <input type="text"/> nejel v autobusu žádný muž. V autobuse bylo pouze <input type="text"/> žen. Celkově se v autobusu vezlo <input type="text"/> cestujících, z toho <input type="text"/> mužů a <input type="text"/> žen.
	V	0	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/> △△△	
	N	<input type="text"/>	0	<input type="text"/> □□□△△△	0	0	
	Jelo	<input type="text"/> □△△	<input type="text"/>	<input type="text"/> □□□□△△△△	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
	Celkem	<input type="text"/>	2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
Ř 34.		A	B	C	D	E	Z <input type="text"/> D do <input type="text"/> E nejel v autobusu žádný muž. V autobuse bylo pouze <input type="text"/> 3 žen. Celkově se v autobuse vezlo <input type="text"/> 8 cestujících, z toho <input type="text"/> 4 mužů a <input type="text"/> 4 žen.
	V	0	△	0	<input type="text"/> □□□□△	△△△	
	N	<input type="text"/> □△△	0	<input type="text"/> □□□△△△	0	0	
	Jelo	<input type="text"/> □△△	<input type="text"/> □△	<input type="text"/> □□□□△△△△	<input type="text"/> △△△	<input type="text"/>	
	Celkem	3	2	8	3	<input type="text"/>	

Literatura

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In HOŠPESOVÁ, A. STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. (Eds) *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 81-122.

SLEZÁKOVÁ, J. Prostředí Krokování. In HOŠPESOVÁ, A. STEHLÍKOVÁ, N., TICHÁ, M. (Eds) *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 123-142.